Um Algoritmo Tratável por Parâmetro-Fixo para a Alocação de Comprimentos de Onda em Redes WDM

André C. Drummond[1], **Nelson L. S. da Fonseca**[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP

{andred,nfonseca}@ic.unicamp.br

Abstract. *The assignment of wavelengths to lightpaths in WDM networks is a crucial problem that needs to be solved efficiently. However, the coloring of the graph representing the lightpaths and their interference is an NP-hard problem. The parameterized Complexity Theory offers an attractive theoretical framework for the derivation of exact solutions with lower complexity than those derived using the Classical Complexity Theory since it transfers the exponentiality dependence from the input parameters describing the network to a parameter called modulator which can be bounded. This paper presents an algorithm for wavelength assignment in transparent WDM networks. Numerical examples illustrate the benefits of the employment of this new theory to the solution of the wavelength assignment problem.*

Resumo. *A alocação de comprimentos de onda para os caminhos ópticos em redes WDM é um problema crucial que requer soluções eficientes. No entanto, a coloração do grafo que representa os caminhos ópticos é um problema NP-Difícil. A Teoria da Complexidade Parametrizada oferece um arcabouço para a derivação de soluções exatas com uma complexidade menor do que as soluções clássicas dado que ela transfere a exponencialidade referente ao tamanho da entrada para um parâmetro que pode ser limitado. Este artigo apresenta um algoritmo para a alocação de comprimentos de onda em redes WDM transparentes. Exemplos numéricos ilustram os benefícios da utilização dessa nova teoria na solução do problema de alocação de comprimentos de onda.*

1. Introdução

O problema de roteamento e alocação de comprimentos de onda (RWA) em redes com multiplexação por comprimento de onda (WDM) visa definir as rotas e os comprimentos de onda a serem alocados para caminhos ópticos. O número de comprimentos de onda utilizados para atender uma certa demanda pode ser minimizado para diminuir a quantidade de *transponders*[1] necessários nos comutadores de borda, reduzindo, assim, o custo da rede. O problema de roteamento e alocação de comprimentos de onda é, comumente, resolvido em duas etapas, uma para obter o roteamento das demandas e a outra para alocar os comprimentos de onda para estabelecer os caminhos que atendem as demandas de transporte [Ramamurthy and Mukherjee 2002].

Uma rede óptica pode ser modelada como um grafo $G = (V, E)$ no qual cada aresta corresponde a um enlace de fibra. Uma requisição $r = [u, v]$ para o estabelecimento de uma nova conexão entre os nós u e v é satisfeita se:

[1]Equipamento que efetua a conversão opto-eletro-óptica.

- um caminho p_r com enlaces pertencentes a G de u a v é alocado para r.
- um comprimento de onda que carrega a informação através dos enlaces de p_r é alocado para p_r.

Na solução de problemas de RWA, se dois caminhos p_r e $p_{r'}$, alocados para as requisições r e r', possuírem pelo menos um enlace em comum, diferentes comprimentos de onda deveram ser alocadas para cada um dos caminhos. A formulação clássica do problema de RWA em redes ópticas transparentes, ou seja, em redes que não efetuam conversão óptico-eletrônica, assume que não há conversão de comprimentos de onda.

Uma forma de modelar o problema de alocação de comprimentos de onda em redes transparentes é criar um grafo auxiliar não direcionado no qual cada vértice representa um caminho óptico na rede. Dois vértices possuem uma aresta entre eles se existir pelo menos um enlace óptico compartilhado entre os caminhos ópticos em questão. Após a derivação do grafo auxiliar, calcula-se uma coloração mínima dos vértices de forma que dois vértices adjacentes sempre recebam cores diferentes. Cada caminho óptico é então marcado com uma cor, o que pode ser diretamente mapeado nos respectivos comprimentos de onda.

A abordagem de coloração de grafos sempre foi utilizada no desenvolvimento de novas soluções para o problema de alocação de comprimentos de onda em redes ópticas. No entanto, por se tratar de um problema NP-Difícil, são utilizadas na literatura heurísticas que garantem a obtenção soluções rápidas [Banerjee and Mukherjee 1996, Zang et al. 2000, Ho and Mouftah 2003, Banerjee and Sharan 2004, Ho and Lee 2006, Meusburger and A. Schupke 2007].

Este artigo introduz um algoritmo para a obtenção da solução **exata** do problema de alocação de comprimentos de onda baseado na Teoria da Complexidade Parametrizada. A Teoria da Complexidade Parametrizada foi recentemente proposta e introduz a noção de tratabilidade por parâmetro-fixo (FPT) na remodelagem de problemas difíceis, removendo a exponencialidade da complexidade do problema original. O uso desta nova teoria permite a obtenção de soluções **exatas** e com baixo custo computacional.

A complexidade dos algoritmos baseados na Teoria da Complexidade Parametrizada é uma função exponencial de um parâmetro introduzido para a solução do problema, porém possui uma dependência não exponencial em relação aos tamanhos de entrada do problema. O objetivo é, portanto, evitar-se a complexidade exponencial em função dos parâmetros de entrada do problema e redefinir o problema em função do novo parâmetro introduzido (k). Se no problema em questão o parâmetro k puder ser limitado, obtêm-se uma solução tratável. Como exemplo, citam-se problemas de alocação de recursos cuja quantidade a ser alocada possa ser limitada. Um algoritmo FPT, com o parâmetro k representando a quantidade de recursos a serem alocados, escala com o crescimento da rede dado que a exponencialidade do problema está amarrada unicamente a quantidade de recursos e não ao tamanho da rede. A Teoria da Complexidade Parametrizada cria a oportunidade do desenvolvimento de novas modelagens para problemas conhecidos.

O algoritmo apresentado neste artigo calcula o menor número de comprimentos de onda necessários a fim de atender uma certa demanda. Sua complexidade de tempo é $O\left(\frac{4^k}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}(m+n)\right)$ que é uma função linear do tamanho da entrada n, e uma função exponencial do parâmetro k. Exemplos numéricos apresentados neste artigo evidenciam que a abordagem parametrizada provê uma forma alternativa de modelagem para o problema de alocação de comprimentos de onda menos complexa que as existentes.

Existe apenas um outro trabalho na literatura que considera o arcabouço parametrizado para a alocação de comprimentos de onda [Erlebach and Stefanakos 2002]. No entanto, este trabalho discute a versão parametrizada do problema de alocação de comprimentos de onda em redes com conversão de comprimentos de onda e não aborda problemas nos quais não há conversão de comprimentos de onda, que são mais difíceis de serem resolvidos.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 introduz a Teoria da Complexidade Parametrizada e sua aplicação no problema de coloração de vértices. A Seção 3 discute a aplicação do arcabouço parametrizado para a alocação de comprimentos de onda em redes óticas WDM. A Seção 4 apresenta exemplos numéricos. Finalmente, na Secão 5 conclusões são derivadas.

2. Complexidade Parametrizada da Coloração de Vértices

A Teoria Clássica da Complexidade classifica os problemas baseada nos seus requisitos de tempo e espaço. Esta teoria pode levar a premissas não realistas em relação a real complexidade dos problemas, dado que, em geral, ela não leva em consideração a natureza intrínseca dos problemas estudados. Foi elaborada, recentemente, uma nova teoria chamada Teoria da Complexidade Parametrizada [Downey and Fellows 1999] que introduz um arcabouço para mudar a complexidade dos problemas que possuem dependência exponencial nos parâmetros de entrada. A Teoria da Complexidade Parametrizada não considera apenas o tamanho da entrada, mas introduz a idéia de um parâmetro adicional na formulação dos problemas [Flum and Grohe 2006].

A idéia principal do arcabouço parametrizado está no desenvolvimento de novos algoritmos que transferem a exponencialidade do problema para um único parâmetro k, propriamente definido, de forma que soluções com complexidades $O(c^n)$ sejam transformadas em soluções com complexidade $O(c^k.f(n))$. Esta mudança por si só não leva necessariamente a um decréscimo na complexidade de tempo ou a um comportamento não exponencial. No entanto, ao se considerar a natureza do problema, pode ser possível a escolha de um parâmetro k que torne a sua solução tratável. Por exemplo, considere um problema com complexidade $O(c^k.f(n))$ no qual $f(n)$ é uma função polinomial, se for possível fixar k, então a complexidade do problema será consideravelmente reduzida. Tal mudança leva a noção de tratabilidade por parâmetro-fixo, cuja classe de complexidade é chamada Tratável por Parâmetro-Fixo (FPT). A tratabilidade por parâmetro-fixo motiva o desenvolvimento de novos algoritmos para a solução de problemas NP-Difíceis que levem em consideração a natureza intrínseca do problema.

O problema de alocação de comprimentos de onda pode ser formulado como um problema de coloração de vértices no qual os vértices representam os caminhos ópticos existentes na rede, e as arestas representam a existência de pelo menos um enlace compartilhado entre os caminhos ópticos. Uma alocação ótima dos caminhos ópticos é dada pela minimização do número de cores utilizadas sob a restrição de que vértices adjacentes possuam cores diferentes.

O problema de coloração ótima em grafos é um problema NP-Difícil. Os melhores algoritmos existentes para a coloração de vértices possuem complexidades de tempo $O(2,4423^n)$, $O(2,4151^n)$ e $O(2,4023^n)$ [Lawler 1976, Eppstein 2003, Byskov 2004], o que torna intratável a busca de uma solução para redes de grande porte.

Por outro lado, existem algoritmos de complexidade polinomial para colorir grafos bipartidos ou de intervalos. Para grafos cordais, existem algoritmos que possuem tempo de execução linear.

Neste artigo, a abordagem para a coloração de grafos apresentada em [Cai 2003] é utilizada. De forma a auxiliar a compreensão desta abordagem, algumas notações devem ser introduzidas:

- Considere $\mathcal{F}$ uma família de grafos e Π um problema NP-Difícil que pode ser resolvido em tempo polinomial para qualquer grafo de $\mathcal{F}$. Seja G um grafo que não pertence a $\mathcal{F}$, mas é semelhante a um grafo de $\mathcal{F}$, diferindo apenas em algumas arestas.
- Considere k um número inteiro positivo; $\mathcal{F} - ke$ denota a classe de grafos que pode ser obtida a partir de $\mathcal{F}$ apenas removendo no máximo k arestas.
- Um Modulador é um conjunto de k arestas que, quando adicionados, transformam G em um grafo da classe $\mathcal{F}$.

Em [Cai 2003], foi introduzido um algoritmo que colore de forma ótima um grafo $\mathcal{F} - ke$ para uma classe de grafos contraíveis nas arestas $\mathcal{F}$ (e.g. planar, cordal, split, intervalo, cografos, etc). O Teorema 1 provê a complexidade de tempo para este problema.

Teorema 1 (Cai, 2003) *Seja $\mathcal{F}$ uma classe de grafos contraíveis nas arestas, e $T(m,n)$ o tempo necessário para computar uma coloração ótima de um grafo de $\mathcal{F}$. Uma coloração ótima de um grafo G que pertença a classe $\mathcal{F} - ke$, dado um Modulador de G, pode ser encontrada em tempo $O(2^k max\{T(m+k,n), m+n+k\})$.*

O algoritmo genérico para uma família contraível nas arestas $\mathcal{F}$ utiliza o método da conexão-contração e sua prova pode ser encontrada em [Cai 2003]. Este resultado implica que o problema de encontrar uma coloração ótima para um grafo da classe $\mathcal{F} - ke$ é FPT se o problema de coloração para um grafo da classe $\mathcal{F}$ puder ser resolvido em tempo polinomial e o problema para encontrar um Modulador para um grafo da classe $\mathcal{F} - ke$ for FPT.

Este artigo introduz um algoritmo baseado no Teorema 1 para grafos da classe $cordal - ke$[2]. Dado que uma coloração ótima de um grafo cordal pode ser encontrada em tempo $O(m+n)$[Tarjan and Yannakakis 1984] e um Modulador para um grafo $cordal - ke$ pode ser encontrado em tempo $O(f(k)(m+n))$ [Cai 1996], então a coloração ótima para um grafo da classe $cordal - ke$ com a complexidade de tempo $O(f(k)(m+n))$ pode ser encontrada.

De forma a encontrar a solução para o problema de coloração de um grafo $cordal - ke$, é necessário resolver dois subproblemas: a coloração de um grafo cordal e a determinação de um Modulador para um grafo $cordal - ke$. O primeiro problema pode ser resolvido executando-se uma busca lexicográfica (e.g. *Cardinality Search*) no grafo G, cuja possível implementação tem complexidade de tempo $O(n + m)$ [Tarjan and Yannakakis 1984]. Dada a ordenação dos vértices de G, é necessário checar

[2]Um grafo é cordal se não possuir ciclos induzidos C_n para $n \geq 4$.

se esta corresponde a uma ordenação perfeita, i.e. uma ordenação que sempre colore o grafo G com o menor número de cores possível. Este procedimento pode ser executado em tempo $O(n+m)$ [Tarjan and Yannakakis 1984]. Portanto, a complexidade para se colorir um grafo cordal é $O(n+m)$.

O problema para encontrar um Modulador para um grafo $cordal-ke$ pode ser resolvido utilizando-se o algoritmos de Cordalização dado em [Cai 1996]. Este algoritmo requer como entrada um grafo G e um inteiro positivo k e retorna um grafo cordal G' que é um supergrafo de G no qual $|E(G')| - |E(G)| \leq k$ se G' existir. A partir de G' é fácil obter o Modulador $M = E(G') - E(G)$. O algoritmo para tal executa os seguintes passos:

Cordalização(G, k)

- Teste se G é cordal, senão:
- Encontre um Buraco[3] H em G.
- Para cada triangulação[4] T de H, faça:
  - Calcula $G' = G + T$.
  - Cordalização(G', $k - (|V(H)| - 3)$).

Um Buraco pode ser encontrado em tempo linear [Tarjan and Yannakakis 1985], e todas as possíveis triangulações de um Buraco podem ser obtidas em tempo $O(C_{k+1}(m+n))$ [Ruskey and Proskurowski 1990], no qual C_{k+1} é o $(k+1)$ésimo número de Catalan.

Portanto, a complexidade de tempo para se encontrar um Modulador para um grafo $cordal-ke$ é $O\left(\frac{4^k}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}(m+n)\right)$. A prova para esta dedução pode ser encontrada em [Cai 1996].

Pelo Teorema 1, pode-se concluir que é possível obter um algoritmo para encontrar uma coloração ótima de um grafo $cordal-ke$ com a complexidade de tempo $O\left(\frac{4^k}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}(m+n)\right)$. Tal algoritmo pertence a classe de complexidade FPT. Além disso, uma solução tratável para o problema de coloração de vértices pode ser obtida se o parâmetro k puder ser fixado, ou pelo menos limitado, e esta solução pode ser aplicada diretamente ao problema de alocação de comprimentos de onda em redes ópticas WDM.

3. Aplicação da Parametrização no Problema de Alocação de Comprimentos de Onda

A complexidade para a obtenção da coloração de um grafo G com n vértices, segundo a abordagem clássica, é de $O(c^n)$. Por outro lado, na abordagem parametrizada tem-se $O(c^k.n)$, no qual k representa o tamanho do Modulador (M) do grafo G. Fica claro que o tempo de execução de um algoritmo baseado na abordagem clássica deva aumentar com o aumento do número de vértices do grafo auxiliar (caminhos ópticos na rede). De outra forma, utilizando-se a abordagem parametrizada, a exponencialidade do problema depende apenas do parâmetro k. Assim, para se avaliar a eficiência do algoritmo estudado para a aplicação na alocação de comprimentos de onda, deve-se primeiramente investigar

[3] Um Buraco é um ciclo sem cordas com mais de 3 vértices.

[4] Uma triangulação de um Buraco H é um grafo formado pelas arestas que, se adicionadas a H, não deixam nenhum outro Buraco em H.

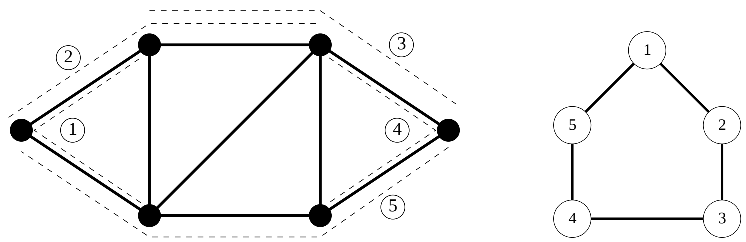

Figura 1. Possível cenário de interação entre caminhos ópticos em uma rede óptica (esquerda) e seu grafo auxiliar correspondente (direita)

se o valor de k pode ser fixado ou não. Se não for possível fixá-lo, um valor limitante deve ser procurado bem como a relação entre k e n.

Um grafo cordal é um grafo que não possui nenhum ciclo induzido com mais de 3 vértices, i.e. é um grafo triangularizado. De forma a garantir que o grafo auxiliar, que representa os caminhos ópticos na rede, seja cordal, é necessário que não haja qualquer grupo de quatro ou mais caminhos ópticos em seqüência de forma que o primeiro caminho óptico compartilhe enlaces apenas com o segundo e o com o último caminho óptico; o segundo compartilhe apenas com o primeiro e o terceiro, e assim por diante, seguindo o mesmo padrão, i.e. um padrão de interferência que forme um ciclo fechado. Se este padrão ocorrer, o grafo auxiliar gerado conterá Buracos, e portanto não será um grafo cordal. A Figura 1 (esquerda) mostra um exemplo de tal cenário para uma rede com cinco caminhos ópticos que gera um grafo auxiliar (direita) contendo um Buraco.

É fácil perceber que não há como garantir que tal seqüência não ocorra na rede, a não ser em topologias específicas. Além disso, considerando topologias genéricas, não há como limitar o tamanho nem a quantidade dos possíveis ciclos gerados.

Pode-se, então, concluir que é impossível fixar o valor de k para um grafo qualquer, e que também é muito difícil limitá-lo. Por outro lado, um limitante largo pode ser obtido considerando-se o pior caso, i.e. quando ocorre o maior valor de k. Este valor é de $k = O(n^2)$, dado que um grafo completo pode ser construído adicionando-se $O(n^2)$ arestas a um grafo trivial[5].

No pior caso, $O(n^2)$ arestas devem ser adicionadas ao grafo auxiliar para torná-lo cordal. Logo, a complexidade do algoritmo para o caso de redes com topologias genéricas é de $O\left(c^{n^2}n\right)$. Este resultado leva a um algoritmo com uma complexidade superior a dos algoritmos da abordagem clássica. Apesar disso, a análise de pior caso não provê uma real avaliação do impacto do parâmetro k na solução de problemas de RWA em redes realistas. No caso médio, algoritmos baseados na Teoria da Complexidade Parametrizada podem ser mais eficientes do que aqueles derivados pela Teoria Clássica como será mostrado a seguir.

4. Exemplos Numéricos

Para avaliar a eficiência do algoritmo proposto, vários cenários de rede foram considerados. Algumas redes foram geradas aleatoriamente e outras representam a topologia de redes reais. O objetivo é avaliar como o algoritmo escala com o crescimento do número

[5] Um grafo que não possui arestas.

de caminhos ópticos. Além disso, explora-se a relação entre o parâmetro k (tamanho do Modulador) e o número de caminhos ópticos.

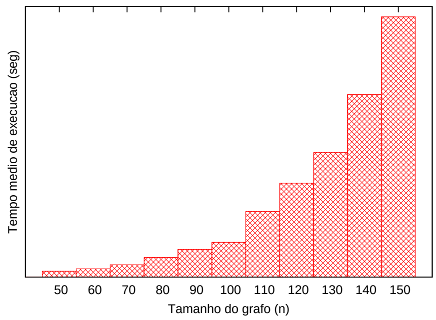

Figura 2. Tempo de execução para grafos gerados aleatoriamente.

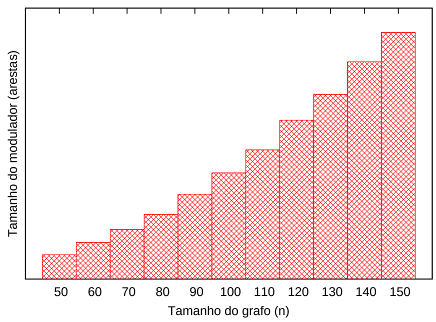

Figura 3. Tamanho do Modulador para grafos gerados aleatoriamente.

Os vértices do grafo de entrada representam os caminhos ópticos e as arestas a interação entre eles. Quanto maior a interação maior será o grau de conexidade do grafo. Grafos com graus de conectividade de 95% e 30% foram gerados. O número de vértices dos grafos gerados variaram entre 50 e 150 em passos de 10. Para cada número de vértices, 10 grafos aleatórios foram gerados totalizando a criação de 110 grafos.

As Figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, o tempo médio de execução e o tamanho do Modulador para redes com grau de conexidade de 95%. Pode-se observar facilmente que o crescimento do tempo de execução é exponencial enquanto que o crescimento do tamanho do Modulador é linear. Isso indica que, apesar de no pior caso a complexidade do Modulador ser $O(n^2)$, em redes com diferentes topologias o crescimento do Modulador é linear em função do número de vértices. O mesmo padrão foi observado para os grafos com grau de conexidade de 30%.

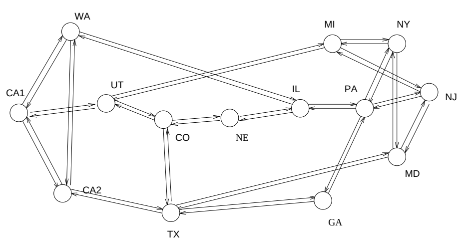

Figura 4. Topologia da rede NSFNet

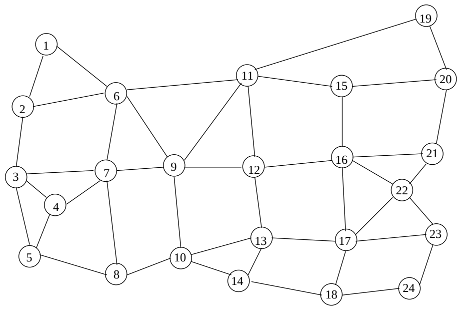

Figura 5. Topologia da rede AT&T

Para avaliar cenários realistas, foram realizados experimentos utilizando a topologia da rede NSFNet com 14 nós, 21 enlaces bidirecionais e 91 pares origem-destino (Figura 4), e a topologia da rede AT&T com 24 nós, 43 enlaces bidirecionais e 276 pares origem-destino (Figura 5). Os caminhos ópticos de menor custo foram escolhidos para os pares origem-destino em ambas as redes.

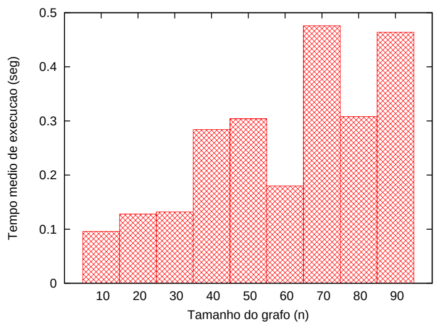

Figura 6. Tempo de execução para diferentes quantidades de caminhos ópticos na rede NSFNet.

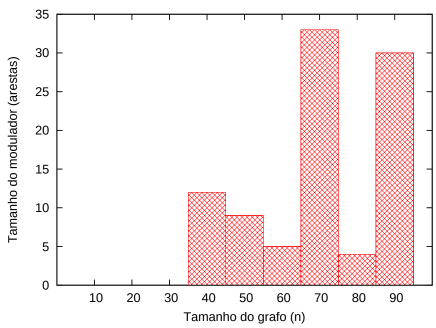

Figura 7. Tamanho do Modulador para diferentes quantidades de caminhos ópticos na rede NSFNet.

As Figuras 6 e 7 mostram o tempo médio de execução e o tamanho do Modulador para a topologia da rede NSFNet. O crescimento do tempo de execução é praticamente linear em função do tamanho do grafo auxiliar, isso ocorre devido a pequena variação observada do tamanho do Modulador. Além disso, observando os casos para sessenta e oitenta vértices, fica clara a independência do tamanho do Modulador em relação a carga da rede, i.e. em relação ao tamanho do grafo auxiliar.

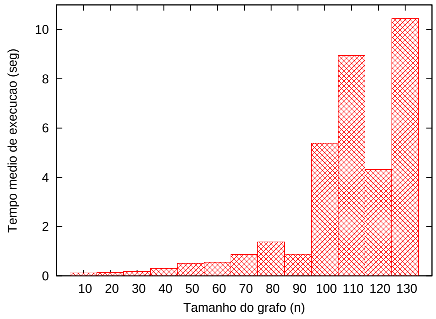

Figura 8. Tempo de execução para diferentes quantidades de caminhos ópticos na rede AT&T.

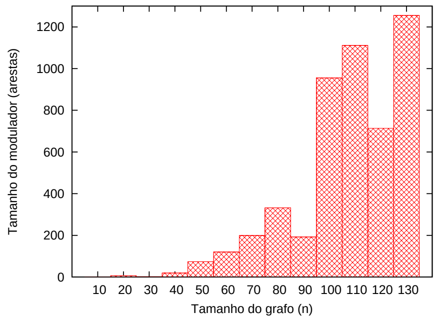

Figura 9. Tamanho do Modulador para diferentes quantidades de caminhos ópticos na rede AT&T.

As Figuras 8 e 9 mostram o tempo médio de execução e o tamanho do Modulador para a topologia da rede AT&T. Para essa rede, ambos os gráficos não apresentaram crescimento linear diferentemente do que ocorreu no cenário da rede NSFNet. Todavia, pode-se perceber o potencial da abordagem parametrizada na alocação de comprimentos de onda dado os baixos valores gerados para o tamanho do Modulador nos casos em que há noventa e cento e vinte caminhos ópticos, o que levou o algoritmo a executar em tempos equivalentes a cenários com muito menos caminhos ópticos.

Estes resultados mostram que independentemente do tamanho da rede ou de quão carregada ela esteja, existe uma grande chance de que o grafo auxiliar seja quase-cordal, o que leva a Moduladores de tamanhos menores, e portanto demandando tempos de execução que não dependem do número de caminhos ópticos na rede. Além disso, quando o tamanho do Modulador puder ser limitado, existem ganhos consideráveis no tempo de execução.

5. Conclusões

A alocação de comprimentos de onda é um problema chave para o gerenciamento das redes WDM. Para resolvê-lo, um grafo auxiliar representando os caminhos ópticos e a interação entre eles é criado de forma que sua coloração ótima defina uma alocação de comprimentos de onda apropriada. Porém, encontrar a coloração ótima de um grafo genérico é um problem NP-Difícil e portando métodos heurísticos para se obter uma solução aproximada tem sido desenvolvidos para tal.

Este artigo introduziu um algoritmo exato baseado na Teoria da Complexidade

Parametrizada para a alocação de comprimentos de onda em redes WDM transparentes. Exemplos numéricos mostram que o algoritmo baseado na Teoria da Complexidade Parametrizada apresenta soluções mais eficientes do que os derivados através da Teoria da Complexidade Clássica . As contribuições do presente artigo artigo abrem novas possibilidades para a aplicação desta nova teoria na derivação de soluções exatas e eficientes para a solução do problema de alocação de comprimentos de onda em redes ópticas.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo programa URP da CISCO e pelo CNPq.

Referências

Banerjee, D. and Mukherjee, B. (1996). A practical approach for routing and wavelength assignment in large wavelength-routed optical networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 14(5):903–908.

Banerjee, N. and Sharan, S. (2004). A evolutionary algorithm for solving the single objective static routing and wavelength assignment problem in wdm networks. In *Proceedings of International Conference on Intelligent Sensing and Information Processing*, pages 13–18.

Byskov, J. M. (2004). Enumerating maximal independent sets with applications to graph colouring. *Operations Research Letters*, 23(6):547–556.

Cai, L. (1996). Fixed-parameter tractability of graph modification problems for hereditary properties. *Information Processing Letters*, 58(4):171–176.

Cai, L. (2003). Parameterized complexity of vertex colouring. *Discrete Applied Mathematics*, 127(3):415–429.

Downey, R. G. and Fellows, M. (1999). *Parameterized Complexity*. Monographs in Computer Science. Springer.

Eppstein, D. (2003). Small maximal independent sets and faster exact graph colouring. *J. Graph Algorithms & Applications*, 7(2):131–140.

Erlebach, T. and Stefanakos, S. (2002). Wavelength conversion in networks of bounded treewidth. Technical report, Institut für Technische Informatik und Kommunikationsnetze Computer Engineering and Networks Laboratory.

Flum, J. and Grohe, M. (2006). *Parameterized Complexity Theory*. Springer.

Ho, P.-H. and Mouftah, H. T. (2003). Towards optimal routing of lightpaths in dynamic wdm networks. In *IEEE ISCC*, pages 672–677.

Ho, Q.-D. and Lee, M.-S. (2006). Time-efficient optimal wavelength assignment in optical wdm networks with conversion capability. *IEEE Communications Letters*, 10(3):198–200.

Lawler, E. L. (1976). A note on the complexity of the chromatic number problem. *Inf. Process. Lett.*, 5(3):66–67.

Meusburger, C. and A. Schupke, D. (2007). Method to ensure a feasible wavelength assignment within the routing-only problem for transparent wdm networks. In *Proceedings of International Conference on Transparent Optical Networks*, pages 117–120, Rome, Italy.

Ramamurthy, R. and Mukherjee, B. (2002). Fixed-alternate routing and wavelength conversion in wavelength-routed optical networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 10(3):351–367.

Ruskey, F. and Proskurowski, A. (1990). Generating binary trees by transpositions. *Journal Algorithms*, 11:266–283.

Tarjan, R. E. and Yannakakis, M. (1984). Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 13(3):566–579.

Tarjan, R. E. and Yannakakis, M. (1985). Addendum: Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 14(1):554–255.

Zang, H., Jue, J. P., and Mukherjee, B. (2000). A review of routing and wavelength assignment approaches for wavelength-routed optical wdm networks. *Optical Network Magazine*, 1:47,60.