

# Um Processo Envelope para Modelagem de Tráfego Multifractal

César Augusto Viana Melo\*, Nelson Luis Saldanha da Fonseca †

<sup>1</sup>Instituto de Computação  
Universidade Estadual de Campinas  
Av. Albert Einstein, 1251 13083-970 Campinas SP

**Resumo.** Neste artigo, introduz-se um processo envelope para modelagem de tráfego multifractal baseado no movimento Browniano multifractal. O processo envelope proposto é extensivamente avaliado realizando-se a modelagem de dados reais e dados sintéticos. Mostra-se a estimativa de um limitante para o instante em que o trabalho não-realizado no sistema alcança o seu máximo. Introduz-se, também, um novo estimador para funções de Hölder.

**Abstract.** This paper introduces an envelope process for multifractal traffic modeling based on multifractional Brownian motion process. Extensive simulation results indicates that the envelope process is accurate. An upper bound for the time scale at which the backlog of a queue fed by the envelope process is maximum is derived. Moreover, a novel estimator for the Hölder parameter is introduced.

## 1. Introdução

As evidências apresentadas em [Leland et al., 1994] sobre a natureza fractal do tráfego de redes representaram um delimitador nas pesquisas em teletráfego. O tráfego de natureza fractal, ou simplesmente tráfego fractal, possui duas propriedades marcantes: a autocorrelação decai lentamente com o tempo e suas estatísticas são insensíveis às escalas de tempo em que são observadas. Esta última propriedade é conhecida como a auto-similaridade do tráfego. Modelos de tráfego vêm sendo propostos para caracterizar a natureza fractal do tráfego [Ma and Ji, 2001][Willinger et al., 1996]. Entre estes modelos, um dos que ganhou maior destaque foi o modelo baseado no processo movimento Browniano fractal. O processo movimento Browniano fractal pode ser caracterizado por um reduzido número de parâmetros: média, variância e parâmetro de Hurst, ou parâmetro  $H$ , que indica o grau de auto-similaridade do processo. Em geral, experimentos apontam que o valor do parâmetro  $H$  para o tráfego de redes reside no intervalo  $(0.5, 1.0)$  [Leland et al., 1994][e P.Abry, 1999]. Em processos fractais, o parâmetro de Hurst mantém-se constante nas diversas escalas de tempo.

Investigações envolvendo tráfego IP (*Internet Protocol*) constataram a existência de uma escala de tempo limite, abaixo da qual processos fractais não são capazes de caracterizar com precisão o tráfego [A.Erramilli et al., 2001] [A.Feldman et al., 1998], o

---

\*Trabalho parcialmente financiado pela FAPESP (processo 00/09772-6)

†Trabalho parcialmente financiado pela CNPq (processo 300064/95-0)

que pode ser explicado pelo fato de que os cenários nos quais o tráfego IP é gerado diferenciam-se, em muito, daqueles onde a natureza fractal do tráfego foi constatada. O tráfego IP, apresenta as seguintes características : i) escalas de tempo de interesse fora das regiões definidas para os modelos fractais; ii) forte influência da ação de mecanismos de controle do tráfego sobre as estatísticas do tráfego; iii) pequena diferença entre a taxa de pico de uma fonte e capacidade do enlace e; iv) distribuições marginais do tráfego não-gaussianas.

A grosso modo, pode-se diferenciar um processo fractal de um processo multifractal pela representação do grau de variabilidade. Enquanto que num processo fractal o grau de variabilidade é constante (parâmetro  $H$ ), num processo multifractal este valor é uma função do tempo.

Em [A.Erramilli et al., 2000], um modelo de tráfego que leva em consideração a natureza multifractal em escalas de tempo pequenas foi introduzido. Erramilli, Narayan, Neidhat e Saniee [A.Erramilli et al., 2000] mostraram a existência de uma escala de tempo  $\theta$ , a partir da qual o tráfego apresenta um comportamento monofractal. Para escalas de tempo menores que  $\theta$ , o comportamento multifractal do tráfego se manifesta. Para o tráfego analisado em [A.Gilbert et al., 1998], esta escala é da ordem de 1 (um) segundo, enquanto que para o tráfego analisado em [A.Erramilli et al., 2000] esta escala é da ordem de 512 (quinhentos e doze) milisegundos. Em [Ma and Ji, 2001], apresenta-se a definição geral de um modelo para a caracterização de tráfego gaussiano que é estendida para tráfego não-gaussiano. O tráfego caracterizado é heterogêneo com estatísticas de curta e longa duração. O modelo é definido no domínio das transformadas wavelet. A utilização de transformadas wavelet é justificada pela constatação de que os coeficientes wavelet  $d_s$ , resultantes da transformação aplicada sobre o tráfego, apresentam estatísticas de curta duração a despeito das estatísticas verificadas no tráfego.

A principal contribuição deste trabalho é a definição de um modelo de tráfego minimalista, baseado no processo envelope do processo movimento Browniano multifractal, capaz de capturar a natureza multifractal do tráfego. Resultados de um amplo processo de validação, realizado para constatar a precisão do modelo, são discutidos. Além disso, a escala de tempo de interesse de uma fila alimentada pelo processo envelope é derivada. Essa escala de tempo indica o instante no qual o trabalho não realizado no sistema é máximo. Mostra-se, através de experimentos de simulação, que os limites derivados são precisos.

A variabilidade de um processo multifractal é medido pela função de Hölder associada a ele. Assim, os estimadores de função Hölder são elementos de grande importância na caracterização de processos multifractais. Uma contribuição adicional deste artigo é a definição de um novo estimador para função de Hölder associada a um processo multifractal. Este estimador apresenta boa precisão e é robusto.

As próximas seções estão assim organizadas: na Seção 2., introduz-se a definição do processo movimento Browniano multifractal (mBm). Na Seção 3., introduz-se a definição de um estimador para a função Hölder  $H(t)$  associada a um mBm. Na Seção 4., um modelo para a caracterização de tráfego multifractal é apresentado. Na seção 5., deriva-se um limite para escala de tempo de interesse de um sistema alimentado por um processo mBm. Na Seção 6., conclusões e trabalhos futuros são apresentados.

## 2. O processo movimento Browniano multifractal

Nesta seção, apresenta-se a definição do processo mBm introduzido em [Peltier and J.L.Vehel, 1995]. O processo movimento Browniano multifractal (mBm) é uma generalização do processo movimento Browniano fractal (fBm). A generalização se dá com a substituição do parâmetro de Hurst,  $H$ , por uma função de Hölder,  $H(t)$ , introduzindo uma dependência entre a regularidade local e o instante de tempo  $t$ . Em outras palavras, enquanto a regularidade local num processo fBm é constante e igual a  $H$ , em um processo mBm, ela varia ao longo do tempo e é definida pelo valor da função de Hölder  $H(\cdot)$ . A definição da função  $H(\cdot)$ , associada a um processo mBm  $W(\cdot)$ , como uma função de Hölder garante a continuidade  $W(\cdot)$ .

Antes de se apresentar a definição formal de um processo mBm, define-se o conceito de função de Hölder.

Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita uma função de Hölder com expoente  $\beta > 0$ , se para cada  $x, y \in X$  com  $d_X(x, y) < 1$  tem-se

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_X(x, y)^\beta$$

para alguma constante  $c > 0$ .

Seja  $H : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  uma função de Hölder com expoente  $\beta > 0$ . O movimento Browniano multifractal é um processo Gaussiano definido em  $(0, \infty)$  e dado por [Peltier and J.L.Vehel, 1995]:

$$W_{H(t)} = \frac{1}{\Gamma(H(t) + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H(t)-1/2} - (-s)^{H(t)-1/2}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H(t)-1/2} dB(s) \right\}$$

onde  $B(s)$  representa o movimento Browniano.

O processo mBm, apesar de ser uma generalização do processo fBm, não possui todas as suas propriedades. Um exemplo disso é a não estacionaridade dos incrementos do processo mBm. As propriedades do processo mBm são :

- dada uma função de Hölder  $H(\cdot)$ , o processo mBm  $W(\cdot)$  com  $H(\cdot)$  associada é contínuo;
- o processo mBm  $W(\cdot)$  com função de Hölder  $H(\cdot)$  associada apresenta auto-similaridade local (*local asymptotic self-similar class*), ou seja :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{W(t + \rho u) - W(t)}{\rho^{H(t)}} \right\}_{u \in \mathbb{R}^+} = \{B_{H(t)}(u)\}_{u \in \mathbb{R}^+}$$

onde  $B_{H(t)}(u)$  é um processo fBm com parâmetro Hurst  $H = H(t)$ , o valor da função  $H(\cdot)$  no instante  $t$ .

### 3. Um novo estimador para funções Hölder

A função de Hölder  $H(\cdot)$ , ou simplesmente função  $H(\cdot)$ , associada a um mBm captura a variabilidade do processo ao longo do tempo. Torna-se, portanto, necessário a definição de métodos capazes de estimar a função  $H(\cdot)$ .

A seguir, introduz-se um novo estimador para a função  $H(\cdot)$ , denominado estimador paramétrico suavizado. Este novo estimador é uma extensão do estimador proposto em [Peltier and J.L.Vehel, 1995] denominado estimador paramétrico. A grande desvantagem do estimador paramétrico é o descarte de metade dos pontos da série analisada. Por outro lado, o estimador paramétrico suavizado apresenta um reduzido descarte na série e a convergência verificada entre a função e os valores estimados é melhor que aquela apresentada pelo estimador paramétrico. Além disso, mantém-se a principal característica do estimador paramétrico que é a utilização de expressões algébricas simples.

Seja  $W(t)$  um processo mBm com função  $H(\cdot)$  associada. Os valores que a função  $H(\cdot)$  assume nos instantes  $t$  são determinados pelo estimador paramétrico suavizado em três passos:

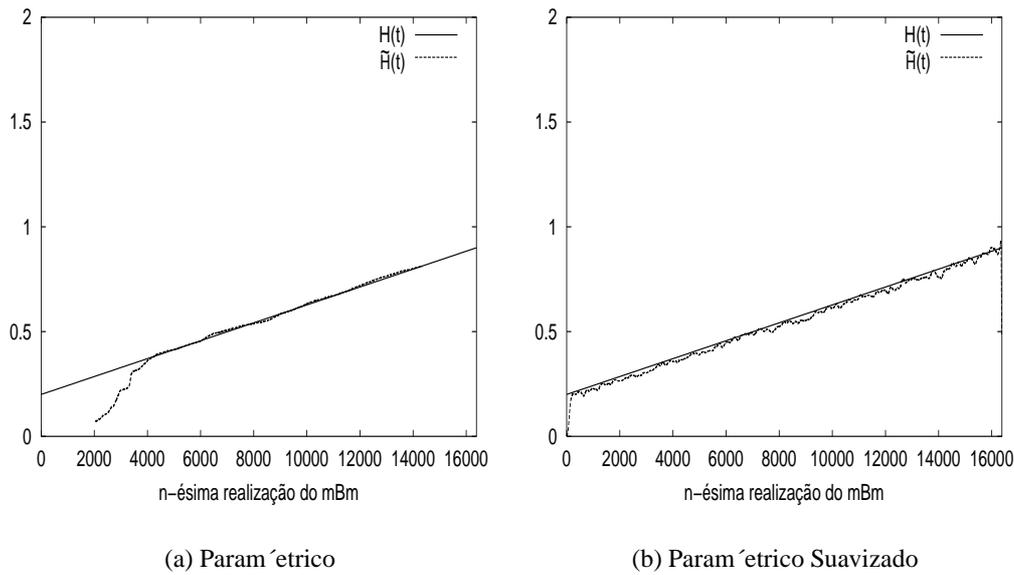
1. Definição do tamanho da vizinhança  $Ne = \lfloor j/2 \rfloor - 1$  onde  $j$  é um inteiro tal que o tamanho da série  $N$  seja dado por  $N = 2^j$ .
2. Utilização do estimador paramétrico com tamanho da vizinhança igual a  $Ne$  sobre o processo  $W(t)$ .
3. Aplicação da função de suavização *Savitzky-Golay smoothing filter* [Press et al., 1993] sobre o resultado do passo 2. A curva obtida neste passo serve como uma aproximação para os valores da função  $H(\cdot)$ .

Um amplo processo de validação foi realizado para avaliar a precisão e a robustez do estimador paramétrico suavizado. Mostra-se, a seguir, exemplos obtidos no processo de validação. As séries utilizadas são processos mBm gerados conforme o procedimento em [Peltier and J.L.Vehel, 1995]. Aos processos mBm gerados associou-se as seguintes funções de Hölder:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= 0.7t + 0.2 & t \in (0, 1) \text{ (Figura 1)} & \quad (1) \\
 H(t) &= 3.0t^2 - 3t + 0.95 & t \in (0, 1) \text{ (Figura 2)} & \\
 H(t) &= \begin{cases} 0.2 & \text{se } t \in (0, 0.49] \\ 0.5 & \text{se } t \in [0.5, 1.0) \end{cases} & \text{(Figura 3)} &
 \end{aligned}$$

As Figuras 1, 2 e 3 comparam resultados obtidos para a estimativa da função  $H(\cdot)$ , usando os estimadores paramétrico e paramétrico suavizado. Em todas as avaliações realizadas com o estimador paramétrico suavizado, observa-se uma rápida convergência do valor estimado  $\tilde{H}(\cdot)$  e o valor da função  $H(\cdot)$ . Além disso, o descarte causado à série, pela estimativa inadequada de  $H(\cdot)$ , é reduzido significativamente. O resultado apresentado na Figura 3.b mostrando a rápida convergência entre  $\tilde{H}(\cdot)$  e  $H(\cdot)$ , e a identificação imediata de mudança de comportamento da função, 8000-ésima realização, corroboram a robustez do estimador proposto.

Os resultados apresentados nas Figuras 1, 2 e 3 foram obtidos a partir de processos mBm com 16384 amostras. Resultados semelhantes foram derivados para processos com



**Figura 1: Comparação entre  $H()$  e  $\tilde{H}()$  para função linear**

tamanho das amostras definidos no intervalo de  $[8192, 65536]$  e, também, para outras funções  $H()$ .

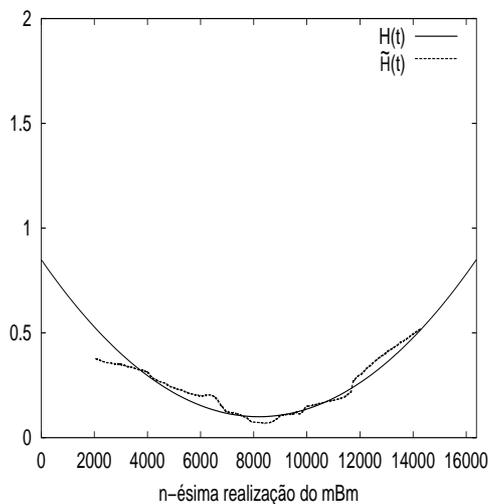
#### 4. O processo envelope do processo mBm

Nesta seção, apresenta-se o processo envelope (PE) de um processo mBm com função  $H()$  associada. Um processo envelope é um limitante superior para um processo real. Existem dois tipos de processos envelopes: PE determinísticos e PE probabilísticos. A diferença entre PE determinístico e PE probabilístico reside na possibilidade de violação do limitante. Enquanto que um processo envelope determinístico considera sempre o comportamento de pior caso do processo, os processos envelope probabilísticos permitem uma avaliação diferente da de pior caso, com o ajuste do limitante utilizando um fator probabilístico. Na realidade, este fator indica a probabilidade de violação do limitante, ou seja, a qualidade da representação desejada.

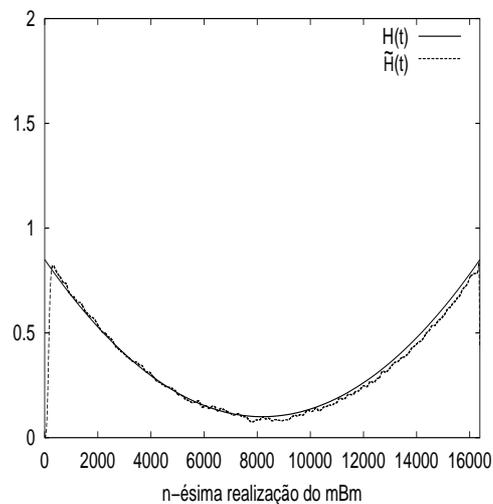
Os PEs determinísticos caracterizam-se pela sua simplicidade e pelo reduzido número de parâmetros necessários para sua definição. Entretanto, os limitantes derivados por estes são “largos”, ou seja, podem ser valores muito mais altos que os valores do processo. Os PEs probabilísticos são mais complexos, porém, são capazes de caracterizar com maior precisão o processo real, ou seja, a diferença entre o limitante e o processo real é menor. O processo envelope derivado, neste artigo, pertence a categoria dos processos envelopes probabilísticos.

Seja  $A(t)$  o acumulado dos incrementos de um processo  $X(.)$  no intervalo  $[0, T]$ . Um processo envelope  $\hat{A}(t)$  para  $A(t)$  pode ser dado por

$$\hat{A}(T) = \int_0^T \hat{a} + g(x) dx \quad (2)$$

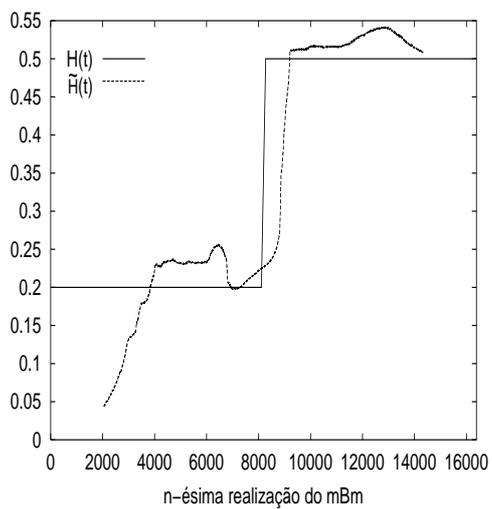


(a) Paramétrico

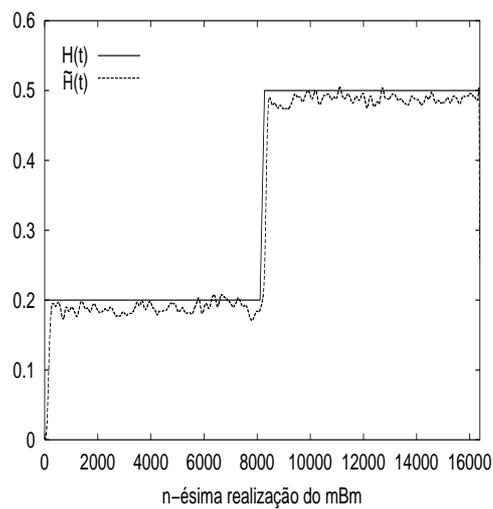


(b) Paramétrico Suavizado

**Figura 2: Comparação entre  $H()$  e  $\tilde{H}()$  para função quadrática**



(a) Paramétrico



(b) Paramétrico Suavizado

**Figura 3: Comparação entre  $H()$  e  $\tilde{H}()$  para função bifásica**

onde  $\hat{a}$  é a média do processo  $X(\cdot)$  e  $g(x)$  é uma função que descreve as variações dos incrementos de um processo  $X(\cdot)$ , em relação a sua média. Para o processo envelope do mBm a função  $g(x)$  será derivada a partir de um limitante superior para a variância dos incrementos do processo.

Seja  $W(t)$  o processo mBm padrão, i.e. com média zero e variância unitária, com função  $H(t)$  associada. Sabe-se que [A. Ayache and Véhel, 2000]:

$$cov_W(t, s) = E[W(t)W(s)] = D(H(t), H(s))(t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |t - s|^{H(t)+H(s)}) \quad (3)$$

onde

$$D(x, y) = \frac{\sqrt{\Gamma(2x+1)\Gamma(2y+1)\sin(\pi x)\sin(\pi y)}}{2\Gamma(x+y+1)\sin(\pi(x+y)/2)}$$

então,

$$cov_W(t, t) = E[W^2(t)] = t^{2H(t)} \quad (4)$$

um vez que  $D(H(t), H(t)) = 1/2$ .

Seja  $W(t)$  o processo mBm padrão com função  $H(t)$  associada. Seja  $X(t)$  o processo definido pelos incrementos de  $W(t)$  em intervalos fixo de tamanho  $\rho$ , ou seja,  $X(t) = W(s) - W(t)$ , onde  $s = t + \rho$ . A variância de  $X(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} var[X(t)] &= var[W(s) - W(t)] \\ &= E[(W(s) - W(t))^2] \\ &= E[W^2(s)] - 2E[W(t)W(s)] + E[W^2(t)] \\ &= s^{2H(s)} - 2D(H(t), H(s)) \left[ t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |s - t|^{H(t)+H(s)} \right] + t^{2H(t)} \\ &= s^{2H(s)} - 2D(H(t), H(s)) \left[ t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |\rho|^{H(t)+H(s)} \right] + t^{2H(t)} \\ &= s^{2H(s)} - 2D(H(t), H(s)) s^{H(t)+H(s)} + t^{2H(t)} - 2D[H(t), H(s)] t^{H(t)+H(s)} \\ &\quad + 2D(H(t), H(s)) \rho^{H(t)+H(s)} \\ &\approx \rho^{2H(t)} \end{aligned} \quad (5)$$

para  $\rho$  suficientemente pequeno.

Um limitante superior largo para  $var[X(t)]$  com  $\rho$  tomado apropriadamente é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} var[W(t + \rho) - W(t)] &\approx \rho^{2H(t)} \\ &< t^{2H(t)} \quad t \geq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

ou seja, a variância do processo mBm  $W(\cdot)$  com função  $H(\cdot)$  associada (Equação (4)) é um limitante superior largo para a variância dos incrementos de  $W(\cdot)$  (Equação (5)) tomando-se intervalos  $\rho$  suficientemente pequenos. Utilizando este limitante superior, define-se um processo envelope para o acumulado dos incrementos de um processo mBm.

Seja  $A(T)$  o acumulado dos incrementos de um processo mBm  $W(\cdot)$  com média  $\bar{a}$ , desvio padrão  $\sigma$  e função  $H(\cdot)$  em um intervalo  $[0, T]$ . Um processo envelope  $\hat{A}(T)$  para  $A(T)$  é definido, a partir da Equação (2), tomando-se

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{a} \\ g(t) &= \kappa\sigma t^{H(t)}\end{aligned}$$

onde  $\kappa\sigma t^{H(t)}$  é um limitante superior para o desvio padrão dos incrementos de  $W(t)$  (Equação (6)). A constante  $\kappa$  expressa a probabilidade do processo real ultrapassar o processo envelope. O processo envelope  $\hat{A}(T)$  é, então, dado por:

$$\hat{A}(T) = \int_0^T \bar{a} + \kappa\sigma x^{H(x)} dx \quad (7)$$

Dado que o processo envelope utiliza  $t^{2H(t)}$  que é um limite superior para  $\rho^{2H(t)}$ , torna-se necessário um ajuste para melhor caracterizar o processo acumulado dos incrementos de um mBm. Utilizou-se o procedimento de mínimos quadrados para a realização deste ajuste. As funções básicas definidas no procedimento de mínimos são dadas por:

$$\begin{aligned}X_1(m) &= \bar{a}m \\ X_2(m) &= \int_0^{T=m} g(x)dx\end{aligned}$$

Através da minimização da função objetivo obtém-se os parâmetros  $y_k$ s de ajuste das funções básicas e o PE  $\hat{A}(T)$  é, então, redefinido da seguinte forma

$$\hat{A}(T) = \int_0^T \bar{a} + \bar{\kappa}\sigma x^{H(x)} dx$$

onde  $\bar{a} = \bar{a}y_1$  e  $\bar{\kappa} = \kappa y_2$ .

Realizou-se extensiva validação do PE, utilizando-se dados sintéticos e dados de tráfego coletados em redes operacionais. As séries geradas a partir destes dados são chamadas, respectivamente, de processos sintéticos e de processos reais.

Os processos sintéticos foram obtidos com a utilização do gerador de processo mBm definido em [Peltier and J.L.Vehel, 1995]. As funções  $H(\cdot)$  definidas para a geração dos processos mBm sintéticos foram:

$$\begin{aligned}H(t) &= t/2.0 + 0.5 && \text{com } t \in (0, 1); \\ H(t) &= 1.9t^2 - 1.9t + 0.475 && \text{com } t \in (0, 1); \\ H(t) &= 4.9t^3 - 7.9t^2 + 3.35t + 0.51 && \text{com } t \in (0, 1).\end{aligned} \quad (8)$$

Traços de tráfego	Volume(em pacotes)
dec_pkt_1	3.3 milhões
dec_pkt_2	3.9 milhões
dec_pkt_3	4.3 milhões
dec_pkt_4	5.7 milhões
lbl_pkt_4	3.6 milhões
lbl_pkt_5	4.0 milhões

**Tabela 1: Medições avaliadas**

Os tamanhos dos processos sintéticos variaram no intervalo de [8192, 65536]. A média e a variância dos processos foram definidas a partir de valores observados em traços (do inglês *traces*) de tráfego coletados em redes operacionais [A. Erramilli et al., 2000].

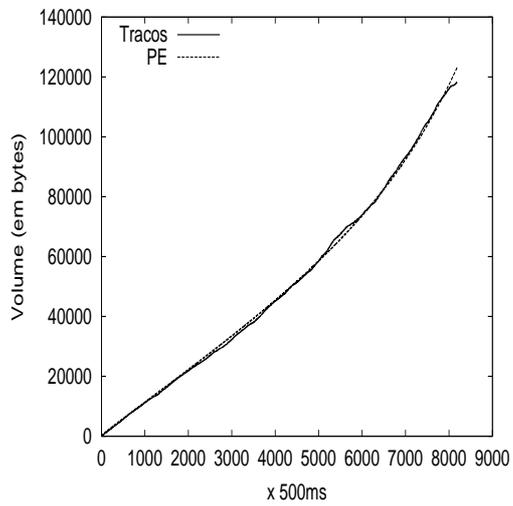
A Figura 4 mostra os resultados obtidos na caracterização dos processos sintéticos a partir dos PEs de mBms. São apresentados nesta figura os resultados para processos com 8192 amostras. Nos demais casos, os comportamentos verificados foram idênticos. Pode-se observar, em todos os gráficos da Figura 4, que o PE representa com grande precisão o processo sintéticos. Violações do PE pelo processo sintéticos são verificadas. Estas violações estão de acordo com a probabilidade de violação do processo envelope probabilístico. Diferenças significativas na precisão da modelagem para as diversas funções utilizadas não foram verificadas, o que ressalta a robustez do modelo proposto.

Foram realizadas, também, avaliações utilizando processos derivados a partir de dados reais. Os processos derivados a partir destes dados correspondem a traços de tráfego IP observados em escalas de tempo onde a sua natureza multifractal se manifesta, como discutido em [A. Erramilli et al., 2000]. As características das medições utilizadas são apresentadas na Tabela (1). Foram realizadas medições durante períodos de uma hora. Os traços encontram-se disponíveis em [Comunicação Pessoal, 2002].

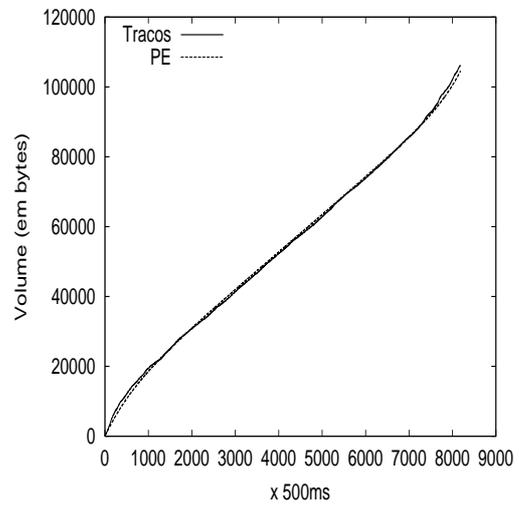
Foi evidenciado em [A. Erramilli et al., 2000] que a natureza multifractal do tráfego IP manifesta-se em escalas de tempo menores que a escala de tempo conhecida como fBm *lower cut-off*, (*flower*). A definição de um valor para a escala *lower cut-off* depende da rede em que o tráfego é observado. Para o conjunto de traços estudados neste artigo, este valor é de aproximadamente  $512ms$ , que é o tempo médio de um RTT (*Round Trip Time*). Agregou-se as medidas existentes nos traços (Tabela (1)) em escalas de tempo de  $10ms$  a  $500ms$ .

As Figuras 5 e 6 mostram os resultados obtidos na validação do PE considerando-se agregações nas escalas de  $90ms$  e de  $500ms$ . Os processos gerados possuem tamanhos de 8.000 e de 40.000 pontos. Os resultados obtidos reforçam a condição do PE como um limitante justo. Violações do processo envelope pelo processo real são verificadas, porém, estão de acordo com a probabilidade de violação do processo envelope probabilístico.

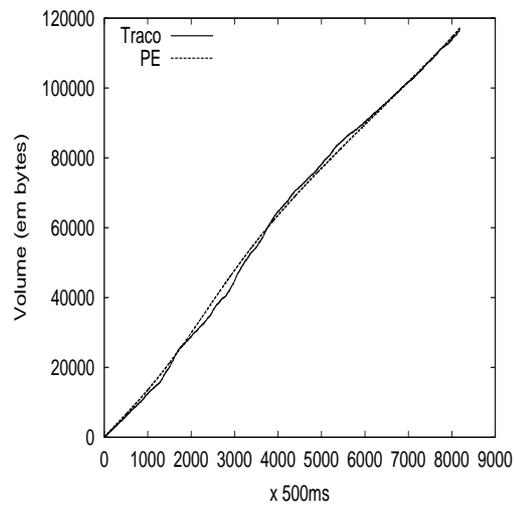
Avaliações com processos reais derivados da agregação das medições na escala de  $10ms$  foram também realizadas. Os resultados obtidos são similares aos apresentados para as demais escalas. Além disso, variações significativas na precisão da representação, para as diferentes escalas de tempo em que o tráfego foi agregado, não foram observadas.



(a) Linear

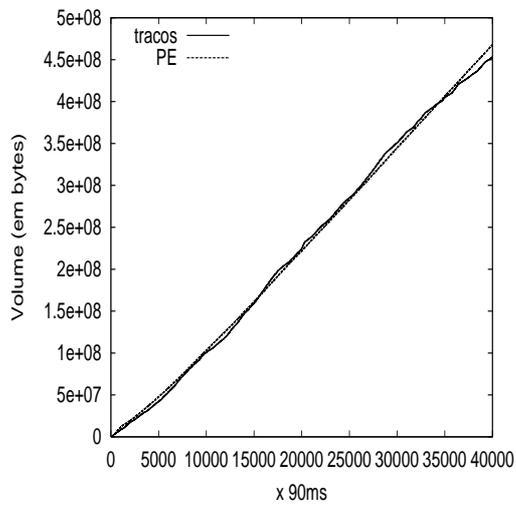


(b) Quadrática

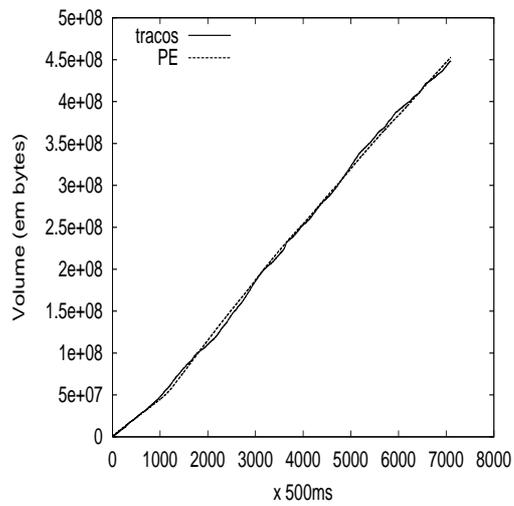


(c) Cúbica

**Figura 4: Processo envelope para o processos sintéticos**

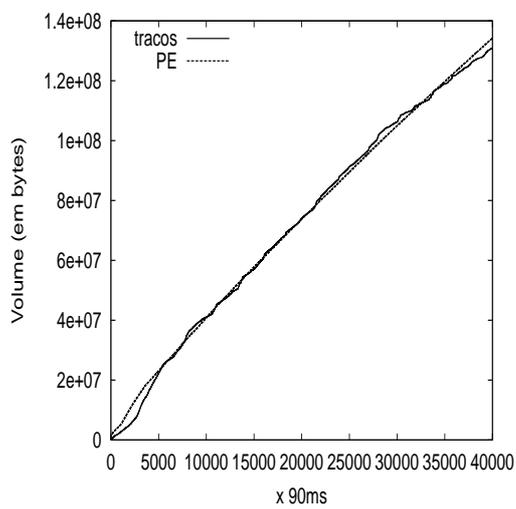


(a) Escala de tempo 90ms

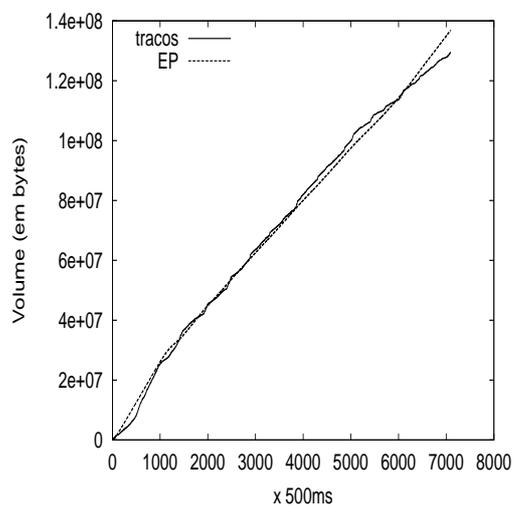


(b) Escala de tempo 500ms

**Figura 5: Processo envelope para o traço dec\_pkt\_1**



(a) Escala de tempo 90ms



(b) Escala de tempo 500ms

**Figura 6: Processo envelope para o traço lbl\_pkt\_4**

## 5. Escala de tempo máxima de interesse

O modelo derivado na seção anterior, entre outras aplicações, possibilita a determinação de um limitante para escala de tempo de interesse. A escala de tempo de interesse é um instante de tempo  $t$  no qual o trabalho não-realizado em uma fila alimentada pelo PE alcança o seu máximo. Deriva-se, nesta seção, um limitante para escala de tempo de interesse denominada **maxts**. O valor de maxts pode ser utilizado para determinar o instante em que mecanismos de controle devem agir, evitando a subutilização do sistema, com reações pró-ativas precipitadas, e a instabilidade do mesmo devido a reações tardias. O valor de maxts pode ser usado também em políticas de controle de admissão.

Seja  $\hat{Q}()$  o tamanho da fila no instante  $t$ , dado por:

$$\hat{Q}(t) = \hat{A}(t) - Ct \quad (9)$$

onde  $\hat{A}()$  é o processo envelope do acumulado do processo de chegadas  $A()$  e  $C$  é a capacidade do canal. O valor limitante para a quantidade máxima de trabalho no sistema é dada pelo máximo da função determinística  $\hat{Q}()$ , ou seja:

$$q_{max} = \max_{t \geq 0} \{\hat{Q}(t)\}$$

Seja  $A()$  o acumulado do processo de chegadas ao sistema. Seja  $\hat{A}()$  o processo envelope de  $A()$ , então, tem-se:

$$q_{max} = \max_{t \geq 0} \{\hat{A}(t) - Ct\} \quad (10)$$

O valor de maxts é dado pelo instante  $t$  em que o lado direito da Equação (10) atinge o seu máximo. Ou seja,

$$\frac{d}{dt}[\hat{A}(t) - Ct] = 0 \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d}{dt}\hat{A}(t) = Ct$$

Substituindo  $\hat{A}()$  pela Equação (2) e diferenciando-se a equação anterior chega-se a

$$t = \left[ \frac{(C - \bar{a})}{\kappa\sigma} \right]^{\frac{1}{H(t)}}$$

ou

$$t^* = \left[ \frac{(C - \bar{a})}{\kappa\sigma} \right]^{\frac{1}{H(t^*)}} \quad (11)$$

onde  $t^*$  é o instante  $t$  que maximiza o lado direito da equação.

Apresenta-se, a seguir, os resultados dos experimentos realizados para determinar um valor limitante para a escala de tempo de interesse. Considerou-se como processo de chegada o PE dos incrementos acumulado de um processo mBm  $W(t)$  com função  $H()$ . Os processos  $W(t)$  gerados possuem  $2^{13}$  (8192) pontos. As funções  $H()$  associadas aos processos  $W(t)$  são os polinômios definidos na Equação (8).

O experimento consistiu em observar a dinâmica da fila (*buffer*) de um sistema alimentado pelos incrementos processo  $W(t)$  limitado pelo seu PE. Resolveu-se a Equação (11) considerando o PE para o acumulado dos incrementos de  $W(t)$ . Compara-se o instante em que a fila alcança o seu máximo e o instante  $t$  que maximiza o lado direito da Equação (11).

As Figuras 7.a, 7.b e 7.c mostram os resultados obtidos quando as funções  $H()$ 's são, respectivamente, definida por um polinômio quadrático, um cúbico e um linear. Todos os resultados mostram que  $t_{max}$  representa de fato um limite superior para o instante em que o sistema alcança o seu máximo. Para os casos em que as funções  $H()$  são definidas por um polinômio quadrático e por um polinômio linear, Figuras 7.a e 7.c,  $t_{max}$  é um valor exato, ou seja, o instante em que o sistema alcança o seu máximo corresponde ao valor indicado pela  $t_{max}$  derivada. Para uma função cúbica  $H()$ , Figura 7.b, identifica-se uma pequena diferença entre o instante em que ocorre o máximo do sistema e o valor coletado nos experimentos. Esta pequena diferença deve-se a probabilidade de violação do PE probabilístico.

## 6. Conclusões

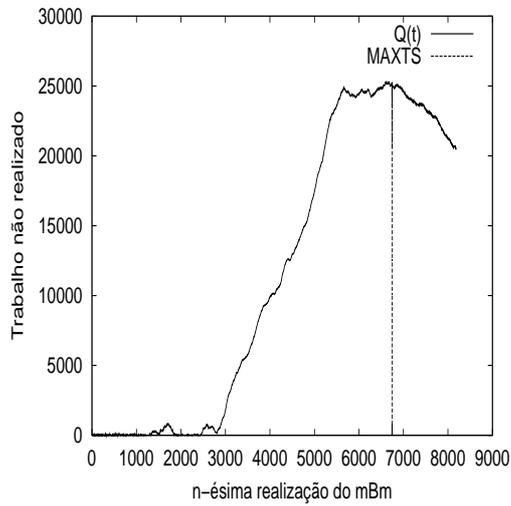
Neste artigo, introduziu-se um novo modelo de tráfego minimalista para um processo de chegadas de natureza multifractal. Resultados de um amplo processo de validação foram apresentados. Os resultados obtidos comprovaram a eficácia do modelo, que caracterizam com precisão processos multifractais obtidos tanto a partir de dados sintéticos quanto a partir de dados reais. Derivou-se, também, um limitante superior justo para a escala de tempo de interesse de uma fila alimentada pelo PE proposto.

A estimativa de funções de Hölder é um dos principais desafios no uso de modelos multifractais de tráfego. Neste artigo, um estimador para funções de Hölder foi proposto. Resultados de um amplo processo de validação corroboram a robustez do estimador, bem como sua boa convergência.

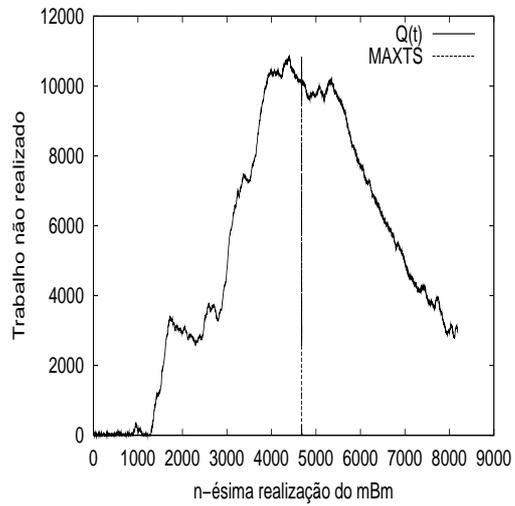
A principal motivação para modelos de tráfego minimalista é o dimensionamento de redes, bem como dos seus mecanismos de controle. Como trabalhos futuros, pretende-se desenvolver mecanismos de policiamento, e controle de admissão baseado no PE proposto neste artigo.

## Referências

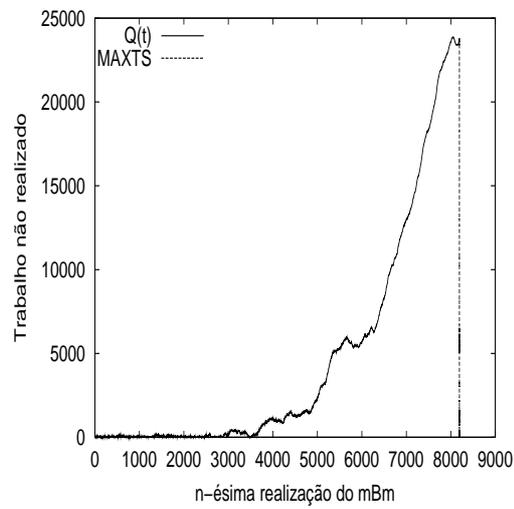
- A. Ayache, S. C. and Véhel, J. L. (2000). The covariance structure of multifractional brownian motion, with application to long range dependence. Preprint.
- A. Erramilli, O. Narayan, A. Neidhart, and I. Saniee (2000). Performance impacts of multi-scaling in area TCP/IP traffic. In *INFOCOM 2000*, pages 352–359.



(a) Função  $H()$  Quadrática



(b) Função  $H()$  Cúbica



(c) Função  $H()$  Linear

**Figura 7: A maxts para processos sintéticos**

- A. Erramilli, O. Narayan, A. Neidhart, and I. Saniee (2001). Multi-scaling models of TCP/IP and sub-frame VBR video traffic. *Journal of Communications and Networks*, 3(4):383–395.
- A. Feldman, Gilbert, A., W. Willinger, and T.G. Kurtz (1998). Looking behind and beyond self-similarity: On scaling phenomena in measured wan traffic. In *ACM SIGCOM*.
- A. Gilbert, A. Feldmann, and W. Willinger (1998). Data Networks as cascades: Explaining the multifractal nature of Internet WAN traffic. In *Proc. ACM Sigcomm*, pages 42–55.
- Comunicação Pessoal (2002). Traços coletados por jeff mogul do digital western research lab. estes traços estão disponíveis em <http://ita.ee.lbl.gov/html/contrib/dec-pkt.html>.
- e P. Abry, D. (1999). A wavelet based joint estimator of the parameters of long-range dependence. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3):878–897.
- Leland, W., Taqqu, M., Willinger, W., and Wilson, D. (1994). On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version). *IEEE/ACM Transaction on Networking*, pages 1–15.
- Ma, S. and Ji, C. (2001). Modeling Heterogeneous Network Traffic in Wavelet Domain. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 9(5):635–649.
- Peltier, R. and J.L. Vehel (1995). Multifractional brownian motion: definition and preliminary results. Technical report, INRIA.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B. (1993). *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- Willinger, W., Taqqu, M., and Erramilli, A. (1996). A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks.